Groupe A

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Tout résultat d'une question antérieure pourra être admis dans la suite du problème.

Les lettres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement le corps des nombres réels et celui des nombres complexes. On identifie $\mathbb{C}$ au plan euclidien $\mathbb{R}^2$ en associant au nombre complexe z le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x_1, x_2) tel que $z = x_1 + ix_2$.

Si z et z' correspondent aux points (x_1, x_2) et (x'_1, x'_2) de $\mathbb{R}^2$, on pose

$$(z \mid z') = x_1x'_1 + x_2x'_2$$

et

$$| z | = (z \mid z)^{1/2}.$$

On note $\mathbb{C}^*$ l'ouvert $\mathbb{C} - \{0\}$ de $\mathbb{C}$ et O^+ et O^- les deux ouverts de $\mathbb{C}^*$ définis par

$$O^+ = \{ z \mid z + | z | \neq 0 \}, \qquad O^- = \{ z \mid z - | z | \neq 0 \}.$$

Soit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ l'application définie par

$$\varphi(z) = e^{2\pi iz}.$$

I

1° Montrer que $\varphi^{-1}(O^+)$ est réunion d'ouverts disjoints Ω_j^+, $j \in \mathbb{Z}$, de $\mathbb{C}$, tels que pour tout $j \in \mathbb{Z}$ la restriction de φ à Ω_j^+ soit un homéomorphisme sur O^+. Établir le même résultat pour $\varphi^{-1}(O^-)$.

2° Soient a et b deux nombres réels ($a < b$) et $f : [a, b] \to \mathbb{C}^*$ une application continue. Si α est un nombre complexe tel que $\varphi(\alpha) = f(a)$, montrer qu'il existe une application continue unique $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ vérifiant $g(a) = \alpha$ et $\varphi \circ g = f$. [Pour l'existence on pourra, en utilisant la compacité de $[a, b]$, montrer qu'il existe un entier n, tel que pour tout entier p, $0 < p \leqslant n$, $f([a + \frac{p-1}{n}(b-a),\ a + \frac{p}{n}(b-a)])$ est contenu dans l'un des ouverts O^+ ou O^-.]

3° *a.* Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{C}^*$ une application continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour toute application continue $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ telle que $f = \varphi \circ g$, $g(1) - g(0)$ est un nombre entier. Montrer en outre que ce nombre ne dépend pas du choix de g. On le note $I(f)$.

b. Calculer $I(f)$ lorsque $f(t) = e^{2i\pi nt}$, $n \in \mathbb{Z}$.

c. Si f_1 et f_2 sont deux fonctions vérifiant les hypothèses de *a.*, calculer $I(f_1 \cdot f_2)$ et $I(\bar{f}_1)$ en fonction de $I(f_1)$ et $I(f_2)$. [$(f_1 \cdot f_2)(t) = f_1(t) f_2(t)$ et $\bar{f}_1(t) = \overline{f_1(t)}$.]

4° *a.* Soit $\mathbf{X}$ le sous-espace de $\mathbb{R}^2$ formé des couples (x, y) tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$, et soit $\mathbf{F} : \mathbf{X} \to \mathbb{C}^*$ une application continue. Montrer qu'il existe une application continue $\mathbf{G} : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ telle que $\varphi \circ \mathbf{G} = \mathbf{F}$.

b. On suppose en outre que l'on a $\mathbf{F}(0, y) = \mathbf{F}(1, y)$ quel que soit $y \in [0, 1]$ et on définit f_0 et f_1 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}^*$ en posant $f_0(x) = \mathbf{F}(x, 0)$ et $f_1(x) = \mathbf{F}(x, 1)$, pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer que l'on a $I(f_0) = I(f_1)$.

A titre d'application on calculera $I(f_a)$, la fonction f_a étant définie par $f_a(t) = e^{2\pi int} + a$, où n est un nombre entier et a un nombre complexe de module différent de 1.

II

On note Γ le cercle unité $\{ z \mid | z | = 1 \}$ de $\mathbb{C}$ et $\mathbf{D}$ le disque fermé $\{ z \mid | z | \leqslant 1 \}$. On appelle champ de vecteurs défini sur Γ (respectivement sur $\mathbf{D}$) une application continue de Γ (respectivement de $\mathbf{D}$) dans $\mathbb{C}$. On considère dans toute cette partie deux champs de vecteurs u et v définis sur Γ et prenant des valeurs non nulles en tout point de Γ, et on définit $h : \Gamma \to \mathbb{C}^*$ en posant $h(z) = \dfrac{v(z)}{u(z)}$.

Soit $\gamma : [0, 1] \to \Gamma$ une application continue vérifiant $\gamma(0) = \gamma(1)$; on pose $d(u, v, \gamma) = I(h \circ \gamma)$. Soit $\gamma_0 : [0, 1] \to \Gamma$ le paramétrage de Γ défini par $\gamma_0(t) = e^{2\pi it}$; γ_0 est donc la restriction à $[0, 1]$ de φ. On écrira $d(u, v)$ pour $d(u, v, \gamma_0)$.

.../...

M 6 E.N.S. ULM & SEVRES 1978

1° Montrer qu'il existe une fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\varphi \circ g(x) = h \circ \varphi(x)$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}$, et que l'on a alors, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$g(x+1) - g(x) = d(u, v).$$

En déduire que l'on a

$$d(u, v, \gamma) = \mathrm{I}(\gamma) \cdot d(u, v).$$

2° *a.* Soit w un troisième champ de vecteurs défini sur Γ et prenant ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que

$$d(u, v) = d(u, w) + d(w, v).$$

b. Soient λ et μ deux fonctions continues définies sur Γ à valeurs réelles strictement positives. Montrer que

$$d(u, v) = d(\lambda u, \mu v).$$

3° On suppose qu'il existe un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ contenant Γ tel que u et v soient les restrictions à Γ de deux fonctions de deux variables réelles continûment différentiables définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. On note encore ces deux fonctions u et v, et on pose

$$e_1(z) = \frac{u(z)}{|u(z)|}, \qquad e_2(z) = ie_1(z)$$

pour tout point z de Ω. Montrer que l'on peut exprimer v en tout point z de Ω sous la forme

$$v(z) = \mathrm{P}(z)e_1(z) + \mathrm{Q}(z)e_2(z),$$

où P et Q sont des fonctions continûment différentiables définies sur Ω à valeurs réelles. On note $d\mathrm{P}$ et $d\mathrm{Q}$ leurs différentielles. Montrer que l'on a

$$d(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_0} \frac{\mathrm{P}d\mathrm{Q} - \mathrm{Q}d\mathrm{P}}{\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2}.$$

III

u et v désignent comme précédemment deux champs de vecteurs définis sur Γ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.

1° *a.* On note u_0 le champ de vecteurs constant défini par $u_0(z) = 1$ pour tout $z \in \Gamma$, et on suppose que u est la restriction à Γ d'un champ de vecteurs défini sur $\mathbf{D}$ et non nul en tout point de $\mathbf{D}$. Montrer que $d(u_0, u) = 0$.

b. Soit N le champ de vecteurs défini sur Γ par $\mathrm{N}(z) = z$. Calculer $d(u_0, \mathrm{N})$.

2° On suppose que u et v vérifient $(u(z) \mid v(z)) \leqslant 0$ pour tout point z de Γ. Montrer que $d(u, v) = 0$.

3° Soit $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ une application continue. Montrer qu'il existe un point z_0 de $\mathbf{D}$ tel que $f(z_0) = z_0$.

IV

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel et de la norme associée :

$$(x \mid x') = \sum_{i=1}^{3} x_i . x'_i, \qquad \|x\| = (x \mid x)^{1/2}$$

si $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$. On appelle $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ et $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les applications respectivement définies par

$$p(x) = x_1 + ix_2, \quad q(x) = x_3,$$

si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et on identifie le plan $x_3 = 0$ à $\mathbb{C}$ grâce à la restriction de p. On désigne par Σ la sphère unité $\|x\| = 1$. Soit $f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ une application continue vérifiant $(x \mid f(x)) = 0$ pour tout $x \in \Sigma$. Si z est un point de $\mathbf{D}$, z^+ (respectivement z^-) désigne le point de $p^{-1}(z) \cap \Sigma$ dont la troisième composante est $\geqslant 0$ (respectivement $\leqslant 0$).

On considère les deux applications suivantes de $\mathbf{D}$ dans $\mathbb{C}$:

$$g_+(z) = p \circ f(z^+) - z\, q \circ f(z^+)$$
$$g_-(z) = p \circ f(z^-) + z\, q \circ f(z^-).$$

1° Montrer que si $z \in \Gamma$, $g_+(z)$ et $g_-(z)$ se déduisent l'un de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe passant par l'origine et parallèle à la tangente en z à Γ, et qu'on a

$$\|f(z)\| = |g_+(z)| = |g_-(z)|.$$

2° Si z est un point quelconque de $\mathbf{D}$ démontrer les inégalités suivantes :

$$|g_+(z)| \geqslant \|f(z^+)\|$$
$$|g_-(z)| \geqslant \|f(z^-)\|.$$

3° On suppose $f(z) \neq 0$ en tout point z de Γ et on considère les restrictions u_+ et u_- de g_+ et g_- à Γ. Comparer $d(u_+, \mathrm{N})$ et $d(u_-, \mathrm{N})$.

4° Montrer qu'il existe un point x de Σ tel que $f(x) = 0$.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail